試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

令和 6 (2024) 年度　入学者選抜
一般選抜　「後期日程」

個別学力検査　問題

数　学

注　意　事　項

1. 数学の問題は問題 1 から問題 4 までの，6 ページです。
2. 解答用紙は $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の，4 枚です。
3. 解答用紙の受験番号欄に受験番号を，氏名欄に氏名を記入しなさい。
4. 解答は全て解答用紙の指定された枠内に記入しなさい。
   枠外や裏面に記入してはいけません。

問題 1　以下の空欄 (i) ～ (x) をうめよ．なお，(10) については，(a) ～ (d) の中から適切なものを選べ．

(1)　$y = \log\left(1 + x^4\right)$ の導関数は $y' =$ $\boxed{\text{(i)}}$ である．

(2)　袋に 0, 2, 4 と書かれたカードが 2 枚ずつ，計 6 枚入っている．袋の中から，4 枚を無作為に取り出して机の上に 1 列に並べてできる数が 4 桁（けた）であるという条件のもとで，2024 となる条件付き確率は $\boxed{\text{(ii)}}$ である．ただし，並べてできる数が 4 桁であるとは，千の位の数が 0 以外となることを意味する．

(3)　$\overrightarrow{a} = \left(p^2, 1, 1\right)$ と $\overrightarrow{b} = (3, p-3, 1)$ が垂直ならば，$p =$ $\boxed{\text{(iii)}}$ である．

(4)　$\displaystyle\int_2^e \log x\, dx =$ $\boxed{\text{(iv)}}$ である．

(5)　関数 $y = f(x)$ が媒介変数 t を用いて　$x = t + 5,\ y = t^2 - 2t$　と表されるとき，y が最小値をとるような x の値は $\boxed{\text{(v)}}$ である．

(6)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2-2n}\right) =$ $\boxed{\text{(vi)}}$ である．

(7)　2^{2024} を 7 で割ったときの余りは $\boxed{\text{(vii)}}$ である．

(8)　複素数 z が　$|z| = 1$　と　$|z-1| = 1$　を満たすとき，$z =$ $\boxed{\text{(viii)}}$ である．

(9)　中心が $(0, 2)$ で直線 $y = x$ に接する円の方程式は $\boxed{\text{(ix)}}$ である．

(10) n を自然数とする．n が奇数であることは，n^2+2n+1 が偶数であるための $\boxed{\text{(x)}}$ ．

(a) 必要十分条件である

(b) 十分条件であるが必要条件でない

(c) 必要条件であるが十分条件でない

(d) 必要条件でなく十分条件でもない

問題 2 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

で定める．また，$t > 0$ とする．この t に対して，点 $(t, f(t))$ における関数 $y = f(x)$ のグラフの接線を ℓ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

以下，接線 ℓ と x 軸との交点の座標を $(u, 0)$ とする．

(3) u を t を用いて表せ．

(4) t が $t > 0$ の範囲を動くとき，u の最小値と，そのときの t の値を求めよ．

(5) (4) で求めた t と u に対して，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = t$，$x = u$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

問題 3 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ は 3 つの解を持つ．解をすべて求めよ．

(2) $f(x) \leqq 0$ であるような x の値の範囲を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(4) (1) で求めた解を a, b, c とおく．ただし，$a < b < c$ とする．さらに，S と T を

$$S = \int_0^a |f(x)|\,dx, \quad T = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

で定める．このとき

$$S > T$$

が成り立つことを証明せよ．必要であれば，$\pi > 3.14$ であることを用いてよい．

問題 4　北見さんは，ギターを購入するため，2 年間（24 か月）貯金することを考えた．以下の目標と北見さんの考察を読み，文章中の問 1 ～ 問 4 に答えよ．

目標

毎月の貯金額を次の規則で増やしていく．x, y を自然数とする．

1 か月目は x 円を貯金する．

2 か月目は $(x + y)$ 円を貯金する．

3 か月目は $(x + 2y)$ 円を貯金する．

4 か月目は $(2x + 4y)$ 円を貯金する．

5 か月目以降も同じように，貯金額を増やしていく．$m \geqq 5$ を自然数とする．

m が 4 の倍数でなければ，m か月目は先月の貯金額に y 円足した額を貯金する．

m が 4 の倍数ならば，m か月目は先月の貯金額の 2 倍の額を貯金する．

2 年間（24 か月）の貯金の総額で 3 万円のギターを買うことを目標とする．

【北見さんの考察 1】

4 か月目までの貯金の総額について計算すると

$$x + (x + y) + (x + 2y) + (2x + 4y) = 5x + 7y$$

すなわち，その総額は $(5x + 7y)$ 円である．

さらに，8 か月目までの貯金額をそれぞれ計算すると，規則から，次のようになる．

5 か月目は $(2x + 5y)$ 円を貯金する．

6 か月目は $(2x + 6y)$ 円を貯金する．

7 か月目は $(2x + 7y)$ 円を貯金する．

8 か月目は $(4x + 14y)$ 円を貯金する．

問 1

8 か月目までの貯金の総額を求めよ．なお，解答欄には総額のみを記載せよ．

【北見さんの考察 2】

自然数 ℓ に対して，ℓ か月目の貯金額を a_ℓ 円とし，ℓ か月目までの貯金の総額を S_ℓ 円とする．ここで，ℓ が 4 の倍数のときのみ貯金額が先月の 2 倍になることから，a_4，a_8，a_{12}，a_{16}，$\cdots$ を考えてみる．

自然数 n に対して，$b_n = a_{4n}$ とおく．このとき，$b_1 = a_4 = 2x + 4y$ である．さらに，規則から，$b_2 = 2(b_1 + 3y)$ であることもわかる．実際，この式に b_1 の値を代入すると

$$b_2 = 2\{(2x + 4y) + 3y\} = 4x + 14y$$

となる．この値は考察 1 で求めた 8 か月目の貯金額と一致する．

問 2

数列 $\{b_n\}$ が満たす漸化式を求めよ．さらに，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

【北見さんの考察３】

自然数 n に対して，$c_n = a_{4n-3} + a_{4n-2} + a_{4n-1} + a_{4n}$ とおく．このとき，c_n を b_n を用いて表そう．まず，$c_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ を b_1 を用いて表す．規則から

$$a_4 = b_1, \quad a_3 = \frac{1}{2}b_1, \quad a_2 = \frac{1}{2}b_1 - y, \quad a_1 = \frac{1}{2}b_1 - 2y$$

となることにより

$$c_1 = \left(\frac{1}{2}b_1 - 2y\right) + \left(\frac{1}{2}b_1 - y\right) + \left(\frac{1}{2}b_1\right) + b_1 = \frac{5}{2}b_1 - 3y = 5x + 7y$$

であることがわかる．同様にして，c_n を b_n を用いて表すことができる．

問 3

数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

【北見さんの考察４】

24 か月目までの貯金の総額が 3 万円を越えるように x, y を定める．自然数 n に対して，$S_{4n} = \sum_{k=1}^{n} c_k$ であることを利用すると，x と y をどのように選べばよいかがわかる．

問 4

自然数 n に対して，S_{4n} を求めよ．さらに，$y = 10$ のとき，$S_{24} \geqq 30000$ を満たすような最小の自然数 x を求めよ．